数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 50-56

有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー

加藤涼香　　田島慎一

KATO SAYAKA　　TAJIMA SHINICHI

新潟大学情報工学科

NIIGATA UNIVERSITY

1 はじめに

有理式係数多項式 $f(x)^\ell, h(x) \in K[x]$ をそれぞれ分母, 分子にもつ有理式 $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$ が与えられたとする。さらに, 多項式 $\varphi(x)$(より一般に, $f(x)$ の零点 $x=\alpha$ の近傍で正則な関数 $\varphi(x)$) が与えられたとし, 有理型関数 $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}\varphi(x)$ の極 $x=\alpha$ での留数値 $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(x)}{f(x)^\ell}\varphi(x)dx$ を求める問題を考えてみる。

この問題は, 有理関数 $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$ の極 $x=\alpha$ におけるローラン展開の計算に帰着させることができるが, 極の位数が高い場合には複雑な式変形を行う必要が生じる。一般にこの様な留数値は, 有理関数そのものではなく極におけるローラン展開の主要部のみ, すなわち有理関数が定める代数的局所コホモロジー類のみで決まることに注目する。今さらに, 方程式 $f(x)=0$ の解は全て単根からなると仮定すると, 有理関数 $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$ が定める代数的局所コホモロジー類 $[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]$ は, 次のような形の $\ell-1$ 階の微分作用素 T を用いて, $[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}] = T[\frac{f'}{f}]$ と表すことができる ([2],[4])。

$$T = \sum_{j=0}^{\ell-1}(-\frac{d}{dx})^j t_{\ell-j-1}(x)$$

ただし, ここで $t_j(x)$ は多項式 $t_j(x)$ が定める零階の微分作用素を意味する。
有理式 $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$ と有理式 $T(\frac{f'(x)}{f(x)})$ の差は多項式であり, 特に $x=\alpha$ において正則であるので,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(x)}{f(x)^\ell}\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\oint T(\frac{f'(x)}{f(x)})\varphi(x)dx$$

が成り立つ。従って部分積分することで与式は,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\{(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}t_0+(-\frac{d}{dx})^{\ell-2}t_1+\cdots+(-\frac{d}{dx})t_{\ell-2}+t_{\ell-1}\}(\frac{f'}{f})\varphi(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint(t_0(x)\frac{d^{\ell-1}\varphi}{dx^{\ell-1}}(x)+\cdots+t_{\ell-2}(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)+t_{\ell-1}(x)\varphi(x))\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

と変形される。$f(x)$ の零点を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ とおくと $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_m}$ となることから, $x=\alpha_i$ における上記の留数値は

$$t_0(\alpha_i)\frac{d^{\ell-1}\varphi}{dx^{\ell-1}}(\alpha_i)+\cdots+t_{\ell-1}(\alpha_i)\varphi(\alpha_i)$$

で与えられることが直ちに従う。従って, この種の問題を扱う際には, 与えられた代数的局所コホモロジー類 $[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]$ に対し,

$$[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]=T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$$

なる微分作用素 T を具体的に求めるアルゴリズムを構成することが重要となる。

本稿では, 微分方程式の理論を用いることで, 微分作用素 T を求めるアルゴリズムを導出する。第2節では有理式が $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$ なる形の場合を考察し, 第3節で T を求めるアルゴリズムの概略を与える。第4節では $\frac{h(x)}{f_1(x)^{\ell_1}\cdots f_m(x)^{\ell_m}}$ なる形の一般の有理式の場合を扱う。最後に第5節で微分方程式を用いた部分分数分解アルゴリズムについて述べる。

2 代数的局所コホモロジー類と微分作用素

有理数係数の多項式全体のなす環を $K[x]$ とおき, 有理数係数多項式を係数に持つ微分作用素全体のなす環 $K[x,\frac{d}{dx}]$ を D_X とおく。今, 既約な多項式 $f\in K[x]$ が与えられたとし, その $X=\mathbf{C}$ における零点集合を $Z=\{x\in X\mid f(x)=0\}$ で表す。Z に台をもつ代数的局所コホモロジー群を $H^1_{[Z]}(K[x])$ とおく。今, 微分作用素 P を $P=f\frac{d}{dx}+\ell f'$ で定めると, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma=[\frac{1}{f^\ell}]$ は次の微分方程式系を満たすことが容易にわかる。

$$\begin{cases} P\sigma=0 \\ f^\ell\sigma=0 \end{cases}$$

そこで, 左 D_X-加群 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ をそれぞれ,

$$\mathcal{M}=D_X/D_XP+D_Xf^\ell, \mathcal{N}=D_X/D_Xf$$

で定める。微分方程式系 $\mathcal{M}$ は Z に台を持つホロノミック系であり, その代数的局所コホモロジー解の空間 $Hom_{D_X}(\mathcal{M},H^1_{[Z]}(K[x]))$ は $\sharp Z=\deg(f)$ 次元のベクトル空間となる。

さて, 次の自然な写像

$$Hom_{D_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})\times Hom_{D_X}(\mathcal{N},H^1_{[Z]}(K[x]))\longrightarrow Hom_{D_X}(\mathcal{M},H^1_{[Z]}(K[x]))$$

に注目する。D_X-加群 $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への D_X 準同型全体のなす空間 $Hom_{D_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ はホロノミック系 $\mathcal{M}$ に対するネター作用素の空間に他ならない (論文 [3])。$Hom_{D_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ を用いて解空間 $Hom_{D_X}(\mathcal{M}, H^1_{[Z]}(K[x]))$ を記述することで, 次の結果を得る。

定理 次が成り立つ。

$$Hom_{D_X}(\mathcal{M}, H^1_{[Z]}(K[x])) \cong \{R[\frac{f'}{f}] \mid R \in D_X, ord(R) = \ell - 1, PR \in D_X f\}.$$

$\ell - 1$ 階の微分作用素 R に対しては, $f^\ell R = 0 \mod D_X f$ が常に成り立つことに注意すると, $Hom_{D_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ の要素の代表元となるような微分作用素 $R \in D_X$ は次のように具体的に特徴づけることができる。

命題 微分作用素 R は次の形の $\ell - 1$ 階の微分作用素であるとする。

$$R = (-\frac{d}{dx})^{\ell-1} r_0(x) + (-\frac{d}{dx})^{\ell-2} r_1(x) + \cdots + (-\frac{d}{dx}) r_{\ell-2}(x) + r_{\ell-1}(x)$$

このとき, 次は同値である。
() $PR \in D_X f$
() 各 $i = 0, 1, \cdots, \ell - 1$ に対し次が成り立つ。

$$if'(x)r_i(x) + \sum_{j=1}^{i} \frac{(\ell-1-i+j)!}{(\ell-1-i)!}(i+(\ell-1)j)\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}f}{dx^{j+1}}(x)r_{i-j}(x) = 0 \mod f.$$

証明 $PR = \sum_{i=0}^{\ell}(-\frac{d}{dx})^i w_i(x)$ とおくと条件 $PR = 0 \mod D_X f$ は各 i に対し, $w_i(x) = 0 \mod f$ が成り立つことと同値である。ここで,

$$P(-\frac{d}{dx})^{\ell-i-1} = \Sigma(-\frac{d}{dx})^{\ell-i-k}\{\frac{(\ell-i-1)!}{(\ell-i-k)!}(\ell k - (\ell-1))\}\frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}$$

を用いて $w_i(x)$ を求めると, $w_\ell(x) = w_{\ell-1}(x) = 0 \mod f$ が直ちにわかる。
$w_{\ell+i-1}(x) \mod f$ は式

$$if'(x)r_i(x) + \sum_{j=1}^{i} \frac{(\ell-1-i+j)!}{(\ell-1-i)!}(i+(\ell-1)j)\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}f}{dx^{j+1}}(x)r_{i-j}(x)$$

と等しいので, (),() は同値になる。

$Hom_{D_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ の $K[x]/(f)$-加群としての構造 (論文 [3]) に注目することで次を得る。

定理 微分作用素

$$E = (-\frac{d}{dx})^{\ell-1} + (-\frac{d}{dx})^{\ell-2} e_1(x) + \cdots + (-\frac{d}{dx}) e_{\ell-2}(x) + e_{\ell-1}(x)$$

は条件 $PE=0 \mod D_X f$ を満たすとする。また,$u(x)\in K[x]$ は条件 $(\ell-1)!(f')^\ell u(x)=1 \mod f$ を満たすとする。このとき,代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f^\ell}]$ は微分作用素 Eu を用いて次の様に表せる。

$$[\frac{1}{f^\ell}]=Eu[\frac{f'}{f}]$$

証明 $S=Eu$ とおく。$PS=PEu=0 \mod D_X f$ が成り立つので,代数的局所コホモロジー類 $\tau=S[\frac{f'}{f}]$ は微分方程式

$$P\tau=f^\ell\tau=0$$

を満たす。また, $f^{\ell-1}E=(\ell-1)!(f')^{\ell-1} \mod D_X f$ より,

$$f'(f^{\ell-1})S=(\ell-1)!(f')^\ell u=1 \mod D_X f$$

を得るので, τ は,

$$f'(f^{\ell-1})\tau=[\frac{f'}{f}]$$

を満たす。微分方程式系 $P\tau=0$, $f^\ell\tau=0$ の代数的局所コホモロジー解で, 条件 $f'(f^{\ell-1})\tau=[\frac{f'}{f}]$ を満たすものは σ のみであるので $Eu[\frac{f'}{f}]=\sigma$ が証明された。

$[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]=T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ なる微分作用素 T を求めるにはライプニッツ則に従って微分作用素の合成 hEu を

$$(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}t_0(x)+\cdots+(-\frac{d}{dx})t_{\ell-2}(x)+t_{\ell-1}(x)$$

なる形に変形すればよい。微分作用素 T を用いると, 有理関数 $\frac{h(x)}{f^\ell(x)}$ の極におけるローラン展の主要部が直ちに求まる。一般に, 微分作用素 $Q\in D_X$ に対し,

$$R=(-\frac{d}{dx})^m r_0(x)+(-\frac{d}{dx})^{m-1}r_1(x)+\ldots+(-\frac{d}{dx})r_{m-1}(x)+r_m(x)$$

なる形の微分作用素 R であり, 条件 $Q-R\in D_X f, \deg r_j<\deg f$ を満たすものが唯一存在する。この微分作用素 R を $\mathrm{NF}(Q)$ で表すことにする。この記号を用いると求める微分作用素 T は $T=\mathrm{NF}(hEu)$ と表せる。

3 アルゴリズムの概略

この節では代数的局所コホモロジー類 $[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]$ を $[\frac{h(x)}{f(x)^\ell}]=T[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ と表現する微分作用素

$$T=(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}t_0(x)+(-\frac{d}{dx})^{\ell-2}t_1(x)+\ldots+(-\frac{d}{dx})t_{\ell-2}(x)+t_{\ell-1}(x)$$

を求めるアルゴリズムを与える。

input $\frac{h(x)}{f(x)^\ell}$
output T
begin
条件 $f'(x)\gamma(x) = 1 \mod f, \deg(\gamma) < \deg(f)$ を満たす $\gamma(x)$ を求める。
$e_0(x) := 1$
for $i = 1$ **to** $i = \ell - 1$ **do**

$$e_i := -\gamma(x)(\sum_{j=1}^{i} \frac{(\ell-1-i+j)!}{(\ell-1-i)!}(i+(\ell-1)j)\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}f}{dx^{j+1}}(x)e_{i-j})/i \mod f$$

$E := (-\frac{d}{dx})^{\ell-1}e_0(x) + (-\frac{d}{dx})^{\ell-2}e_1(x) + \cdots + e_{\ell-1}$
条件 $(\ell-1)!(f'(x))^\ell u(x) = 1 \mod f, \deg(u) < deg(f)$ を満たす $u(x)$ を求める
return $T := \mathrm{NF}(\mathrm{NF}(hE)u)$
end;

注意 1 上記のアルゴリズム中の各計算は体 $K[x]/(f)$ における四則演算のみを用いている。

注意 2 $T = \mathrm{NF}(h\mathrm{NF}(Eu))$ と計算するより,$T = \mathrm{NF}(\mathrm{NF}(hE)u)$ の順で計算する方が, 通常は計算効率がよい。

注意 3 多項式 γ, u は高々 $\deg f - 1$ 次であるが, 係数となる有理数の分母, 分子の桁数が一般にはかなり大きくなる。上記のアルゴリズムをそのままの形で実装するのではなく, なるべく整数係数多項式環での計算に問題を帰着させることで, 計算を効率化できる。

ローラン展開を求めるアルゴリズムが Bronstein-Salvy(文献 [1]) らにより与えられているが, 上記のアルゴリズムはネター作用素の概念にもとづくものであり,Bronstein-Salvy らのアルゴリズムとは全く異なる方法で導出されている。

4 アルゴリズムの一般化

この節では $\frac{h(x)}{f_1(x)^{\ell_1}\cdots f_m(x)^{\ell_m}}$ なる有理式の極におけるローラン展開を求める方法を論じる。ただし,$f_1, \cdots, f_m \in K[x]$ は既約多項式であるとする。

まず, $Z = \{x \in X \mid f_1(x)\cdots f_m(x) = 0\}$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類

$$\sigma = [\frac{1}{f_1(x)^{\ell_1}\cdots f_m(x)^{\ell_m}}]$$

を考える。

$$p = -f_1 f_2 \cdots f_m, q = \ell_1 f_1' f_2 \cdots f_m + \ell_2 f_1 f_2' f_3 \cdots f_m + \cdots + \ell_m f_1 f_2 \cdots f_{m-1} f_m'$$

とおき, 微分作用素 P を $P = p(-\frac{d}{dx}) + q$ で定めると, 代数的局所コホモロジー類 σ の満たす微分方程式系

$$P\sigma = 0, (f_1^{\ell_1}\cdots f_m^{\ell_m})\sigma = 0$$

を得る。σ の直和分解を $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m$ とおく。ただし, $\sigma_i\in H^1_{[Z_i]}(K[x]), Z_i=\{x\in X\mid f_i(x)=0\}$ である。一般に微分作用素は,$supp(P\tau)\subseteq supp(\tau)$ を満たす *local operater* であることから $P\sigma=0$ より $P\sigma_i=0$ が従う。また,D_X-加群 $\mathcal{M}=D_X/D_XP+D_Xf_1^{\ell_1}\cdots f_m^{\ell_m}$ は各点で *simple* あることから, 微分方程式を用いることで,$\sigma_i=S[\frac{f_i'}{f_i}]$ なる微分作用素 S を求めることができる。今, $\sigma_f=\sigma_1, f=f_1, \ell=\ell_1, a(x)=f_2\cdots f_m$ とおく。

$$E=(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}+(-\frac{d}{dx})^{\ell-2}e_1(x)+\cdots+(-\frac{d}{dx})e_{\ell-2}(x)+e_{\ell-1}(x)$$

とする。条件 $PE=0 \mod D_Xf$ を満たす E は, 前の節と同様の計算をし,

$$if'ae_i(x)+\sum_{j=1}^{i}\{\binom{\ell-i+1}{j+1}\frac{d^{j+1}p}{dx^{j+1}}+\binom{\ell-i}{j}\frac{d^jq}{dx^j}\}e_{i-j}(x)=0 \mod f$$

を i に関し逐次解くことで構成できる。

補題 $g=f_2^{\ell_2}f_3^{\ell_3}\cdots f_m^{\ell_m}$ と置くと $\sigma_f=Eu(x)[\frac{f'}{f}]$ となる $u(x)$ は

$$(\ell-1)!(f')^\ell gu=1 \mod f$$

で与えられる。

これらのことを使うと第 2 節,3 節と同様に, 代数的局所コホモロジー類 $h\sigma_i=\tau_i$ を, $\tau_i=T_i[\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}]$ と表す微分作用素 T_i を求めることができる。微分作用素を用いると有理関数 $\frac{h(x)}{f_1(x)^{\ell_1}\cdots f_m(x)^{\ell_m}}$ の部分分数分解を求めずに, T_i を直接構成できる。

5 部分分数分解への応用

有理関数 $\frac{1}{f_1^{\ell_1}(x)\cdots f_m^{\ell_m}(x)}$ は proper であるので, この有理関数を部分分数分解することと対応する代数的局所コホモロジー類 $\sigma=[\frac{1}{f_1^{\ell_1}(x)\cdots f_m^{\ell_m}(x)}]$ の直和分解 $\sigma=\sigma_1+\cdots+\sigma_m, \sigma_i\in H^1_{[Z_i]}(K[x])$ を求めることは同値である。既に述べたように, 直和因子 σ_i は $P\sigma_i=0$ なる微分方程式をみたす。これらのことに注目すると, $\sigma_i=[\frac{u(x)}{f_i(x)^{\ell_i}}]$ とおき, 微分方程式 $P[\frac{u(x)}{f_i(x)^{\ell_i}}]=0$ を解くことで, $\frac{1}{f_1^{\ell_1}(x)\cdots f_m^{\ell_m}(x)}$ の部分分数分解を求めることができる。

まず, 前節と同様に $f=f_1, \ell=\ell_1$ とおき $g=f_2^{\ell_2}f_3^{\ell_3}\cdots f_m^{\ell_m}$ とする。

$$a(x)=f_2f_3\cdots f_m, b(x)=\ell_2f_2'f_3\cdots f_m+\ell_3f_2f_3'f_4\cdots f_m+\cdots+\ell_mf_2f_3\cdots f_{m-1}f_m'$$

とおくと, 微分方程式 $P[\frac{u}{f^\ell}]=0$ は $P=(-fa)(-\frac{d}{dx})+\ell f'a+fb$ と表わせることを用いることで, $[\frac{au'+bu}{f^\ell}]=0$ と同値になることがわかる。分子に注目することで $u(x)$ の満たす方程式

$$au'+bu=0 \mod f^\ell$$

を得る。今,$\deg(u_j) < \deg(f)$ なる多項式 u_j を用いて,

$$[\frac{u}{f^\ell}] = [\frac{u_0}{f^\ell}] + [\frac{u_1}{f^{\ell-1}}] + [\frac{u_2}{f^{\ell-2}}] + \cdots + [\frac{u_{\ell-1}}{f}]$$

と展開する。未知の多項式 u の展開式

$$u = u_0 + u_1 f + u_2 f^2 + \cdots + u_{\ell-1} f^{\ell-1}$$

の初項 u_0 は,条件 $gu_0 = 1 \mod f$ により決まる。さてここで,各 $i = 1, 2, \cdots, \ell$ に対し, $au' + bu = 0 \mod f^i$ を考える。$i = 1$ のとき,次が成立する。

$$au' + bu = 0 \mod f \iff af'u_1 + (au_0' + bu_0) = 0 \mod f.$$

この式を u_1 について解き, $af'u_1 + (au_0' + bu_0) = c_1 f$ とおくと,次を得る。

$$au' + bu = 0 \mod f^2 \iff 2af'u_2 + (au_1' + bu_1) + c_1 = 0 \mod f.$$

ここで右辺の式を解き,得た解 u_2 を用いて, $2af'u_2 + (au_1' + bu_1) + c_1 = c_2 f$ とおくと,

$$au' + bu = 0 \mod f^3 \iff 3af'u_3 + (au_2' + bu_2) + c_2 = 0 \mod f$$

を得る。以下同様にして,$u_1, u_2, \cdots, u_{\ell-1}$ のみたす方程式を得る。af' は f と互いに素な多項式なので,

$$(af')\lambda = 1 \mod f$$

なる多項式 λ を用いて,$u_1, u_2, \cdots$ を逐次的に構成できる。

これらのことを用いると,計算効率の良い部分分数分解アルゴリズムが構成できる。

参考文献

参 考 文 献

[1] M.Bronstein and B.Salvy(1993):Full Partial Fraction Decomposition of Rational Function, *Proceedings of ISSAC'93*, ACM Press,157-160

[2] 田島慎一:代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L.Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1138** 「数式処理における理論と応用の研究」(2000),87-95.

[3] 田島慎一:確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録 **1336** 「双曲形方程式と非正則度」(2003),121-132

[4] 田島慎一:Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality, 京都大学数理解析研究所講究録「積分核の代数解析的研究」掲載予定